7 Newton et Leibniz

Nombre dérivé, étude de fonction

Exercice 1

1. Calculer, par taux d'accroissement la dérivée de la fonction r définie sur $\left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ par $r(x) = 16\sqrt{3x+1}$.

2. Soit i la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ par $i(x) = 20 - \dfrac{1}{3x+1}$. Laquelle de i ou r croît le plus vite sur $\left]-\dfrac{1}{3}, 1\right]$?

3. Pour chacune des fonctions r et i, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse $-\dfrac{1}{4}$.

Correction

1. Soient $x \in \left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$,$h \in [0,+\infty[$ des réels. On calcule $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r(x+h)-r(x)}{h}$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{16\sqrt{3(x+h)+1}-16\sqrt{3x+1}}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}16\dfrac{\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1}}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}16\dfrac{(\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}{h(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}$
(on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée)
$=\lim\limits_{h\to 0}16\dfrac{\sqrt{3(x+h)+1}^2-\sqrt{3x+1}^2}{h(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}$
$=\lim\limits_{h\to 0}16\dfrac{3(x+h)+1-(3x+1)}{h(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}$
$=\lim\limits_{h\to 0}16\dfrac{3x+3h+1-3x-1)}{h(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}$
$=\lim\limits_{h\to 0}16\dfrac{3h}{h(\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1})}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{48}{\sqrt{3(x+h)+1}+\sqrt{3x+1}}$
$=\dfrac{48}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x+1}}$
$=\dfrac{48}{2\sqrt{3x+1}}$
$=\dfrac{24}{\sqrt{3x+1}}$
Ainsi $r'(x)=\dfrac{24}{\sqrt{3x+1}}$

2. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$, $i'(x)=-\left(-\dfrac{3}{(3x+1)^2}\right)=\dfrac{3}{(3x+1)^2}$.

Résolvons sur $\left]-\frac{1}{3},1\right[$ l'inéquation $i'(x)\leq r'(x)$.

$i'(x)\leq r'(x) \Leftrightarrow \dfrac{3}{(3x+1)^2}\leq\dfrac{24}{\sqrt{3x+1}}$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(3x+1)^2}\leq\dfrac{8}{\sqrt{3x+1}}$
$\Leftrightarrow (3x+1)^2\geq\dfrac{\sqrt{3x+1}}{8}$
$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}^2)^2\geq\dfrac{\sqrt{3x+1}}{8}$
$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}^4\geq\dfrac{\sqrt{3x+1}}{8}$
$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}^3\geq\dfrac{1}{8}$
$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}\geq\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$
$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}\geq\dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 3x+1\geq\dfrac{1}{4}$
$\Leftrightarrow 3x\geq-\dfrac{3}{4}$
$\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{1}{4}$. r croît plus rapidement que i sur $\left]-\frac{1}{4},1\right[$

3. Une équation de tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ainsi, pour la courbe représentative de r :

$$y = r'\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right) + r\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y = \frac{24}{\sqrt{\frac{-3}{4}+1}}\left(x+\frac{1}{4}\right) + 16\sqrt{-\frac{3}{4}+1}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{24}{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{4}\right) + 8$$
$$\Leftrightarrow y = 48\left(x+\frac{1}{4}\right) + 8$$
$$\Leftrightarrow y = 48x + 20$$

Pour la courbe représentative de i :

D'après la question 2. $r'\left(-\frac{1}{4}\right) = i'\left(-\frac{1}{4}\right) = 48$.

$$y = i'\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right) + i\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y = 48\left(x+\frac{1}{4}\right) + 20 - \frac{1}{\frac{-3}{4}+1}$$
$$\Leftrightarrow y = 48\left(x+\frac{1}{4}\right) + 20 - \frac{1}{\frac{1}{4}}$$
$$\Leftrightarrow y = 48\left(x+\frac{1}{4}\right) + 20 - 4$$
$$\Leftrightarrow y = 48x + 28$$

Exercice 2

Un objet est jeté verticalement du haut de la Tour Eiffel (330 mètres). Son altitude au cours du temps pendant sa chute est donnée par la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+5t+330$, où g est l'accélération de la pesanteur qui vaut 9,8 m.s^{-2}.

1. Déterminer la durée de la chute de l'objet.

2. Déterminer la vitesse à laquelle est jeté l'objet initialement (la vitesse est la dérivée de la fonction qui donne l'altitude au cours de la chute).

Correction

1. A l'altitude 0, l'objet a accompli entièrement sa chute.
   Ainsi, $0=-\dfrac{1}{2}gt^2+5t+330 \Leftrightarrow -4{,}9t^2+5t+330=0$.
   On calcule le discriminant $\Delta=5^2-4\times(-4{,}9)\times 330=6493$.
   Les racines sont $\dfrac{-5+\sqrt{6493}}{2\times(-4{,}9)}\approx -7{,}7<0$ et $\dfrac{-5-\sqrt{6493}}{2\times(-4{,}9)}\approx 8{,}7>0$.
   La durée de la chute est positive donc la chute a duré 8,7 secondes.

2. La vitesse est initiale de l'objet est $f'(0)$.
   Pour tout réel t positif, $f'(t)=-4{,}9t+5$. Ainsi, $f'(0)=5$. La vitesse initiale est donc 5 mètres par seconde.

Exercice 3

Dans une entreprise de fabrication de luminaires design, le coût de production est donné par la fonction f définie sur $[0{,}60]$ par $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - 8x^2 + 45x + 5000$.

1. Dresser le tableau de variation des coûts fixes.

2. Pour combien de luminaires fabriqués le coût de production est-il minimal ?

3. Déterminer le minimum du coût marginal (le coût marginal est le coût engendré par la production d'une unité supplémentaire et correspond à la dérivée du coût de production).

Correction

1. Dérivons f.
   Pour tout réel $x \in [0{,}60]$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 16x + 45$.
   Etudions le signe de f'. Pour cela, déterminons, si elles existent dans $\mathbb{R}$, ses racines.
   On calcule le discriminant $\Delta = 16^2 - 4 \times \frac{1}{3} \times 45 = 196$.
   Les racines sont $\frac{16 + \sqrt{196}}{\frac{2}{3}} = 45$ et $\frac{16 - \sqrt{196}}{\frac{2}{3}} = 3$.
   Dressons le tableau de variation de f.

x	0		3		45		60
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	5000	↗	5066	↘	950	↗	2900

2. Le coût de production est minimal pour 45 luminaires fabriqués.

3. Calculons le minimum de f'.
   f' est une fonction polynôme du second degré, son minimum est atteint en $\frac{-(-16)}{\frac{2}{3}} = 24$.

   $f'(24) = \frac{1}{3} \times 24^2 - 16 \times 24 + 45 = -147$
   Le coût marginal est minimal pour 24 luminaires fabriqués et vaut -147.